『数学を伝えるための実験』
～数学実験セミナーを通して～

東京大学大学院　数理科学研究科　修士２年　　山本幸司
科学技術インタープリター養成プログラム　１期生

指導教員：東京大学大学院新領域創成科学研究科　松井孝典　教授

『数学を伝えるための実験』
～数学実験セミナーを通して～

東京大学大学院　数理科学研究科　修士２年　　山本幸司
科学技術インタープリター養成プログラム　１期生

目次

1　本論文で扱う問題とその背景

1.1　問題提起

数学は理系にとっては首であり、数学を苦手とするために理系への道を断念するという人も少なくないと聞く。数学の理解には大きく分けて 2 段階ある。

具体的なイメージを形成することが第 1 段階、具体的なイメージを抽象化し汎用性を確保するのが第 2 段階。第 1 段階のイメージ形成は小学校の算数から始まり、大学での教養まで続く。たいていの理系の問題を解くために“使う”数学は第 1 段階であり、この部分を数学だと思っている人が多い、というのが本論文の問題意識である。

1.2　数学イメージの形成

まず数学理解の第 1 段階であるイメージがどのように形成されるか、正確には、どのように形成されることを意図した教育制度が今の日本ではとられているかを確認しておく。

今の日本の数学の教育体系を見ると、“使う”ことに重きを置いていることが一目瞭然である。数学的な背景や理論の重要性は度外視して、とにかく最低限と思われる素養を最初に天下り的に教え込み、しかもそれを嫌と言うほど反復練習させることで習得させるという形式をとっている。聞こえは悪いが世界的に見ても最も効果的と思われるやり方である。

また、実学としての意味合いが強い。つまり実際の生活の中での状況を想定した問題が多く作られている。具体的なイメージを掴み、数や式がいったい何を意味しているのかを意識しながら解いていくタイプの問題を多く扱うことが一般的に望ましいと思われている。

これらの現状は深い説明を要しないだろう。複雑な問題でも自分の中でイメージを作ることのできる学生は優秀だし、逆にイメージをできない学生は算数・数学に対して苦手意識を持つことになるだろう。そのため、上手くイメージできない学生のためにどのような工夫をするべきか（要は算数・数学の落ちこぼれをどうするか）という問題についてはなかなか議論がなされているし、数学を本業とする私にとっては逆に理解の難しい問題なのでこちらに関しては特に言及しないものとする。

むしろ私が問題だと考えているのは、そのイメージを形成した後の第 2 段階をどのように迎えるかである。この第 2 段階の数学がいつ始まるか断言するのは難しいが、中学から徐々にイメージ型から抽象型への移行が始まる。

イメージが先行していたものに対して抽象化を進めるというのは不自然な作業である。なぜなら自らの形成したイメージを壊さなければ抽象化はできないからである。ここに学生を襲う第 2 の試練が待ち受けており、それに対する教育のシステムが整っているとは現状では言いがたい。

既に述べたことだが、イメージの形成を促進し、その上での実用に耐えうる程度の理解を求めることは教育システム上有効であることに間違いない。問題なのは更なる精度の向上を求める時に障害となることで、その対応を誤ると現状の理系嫌いという程度に収まらず、今後の学問発展を大きく阻害するものとなることは明白である。

ではどのようにしたらこの数学の第 2 段階であるイメージ打破・抽象化を教えることができるのか、その点について深く考察をした。

1.3　イメージ先行型から抽象型への移行過程

次節で本論である、イメージの抽象化を教えるための工夫について詳しく述べるが、ここではそのイメージ形成から抽象化への過程を簡単に確認しておく。

イメージに重きを置いた数学から抽象概念へ踏み込むことを意識しなければならなくなるのは概ね高校生 1、2 年であろう。勿論中学の数学でも抽象的な話は扱う場合がある（例えば因数分解）が、それでも計算練習や慣れによる部分が多くイメージ先行型の学習であったとしてもそれほど大きく差異が表れるとは考えにくいからである。

イメージ先行と抽象化の過程が分かりやすい例は三角比から三角関数への拡張である。三角比がイメージによって成り立っている（直角三角形の辺の比という平面図形の力を多分に借りてくる）のに対して、三角関数は単位円や傾きといった平面図形とは直接関係のないもので定義がなされる（この点をついた 1999 年の東大入試が多くの予備校から絶賛を浴びたことは有名である）。

他方，ベクトルはイメージの先行が強すぎて抽象化が上手くいっていない例と見ることができる。高校に習う「向きと大きさのあるもの」「平面上での矢印」というイメージが強すぎて、抽象化された「複数の値を有する量」という見方ができないために、大学でのベクトル解析が全く分からないという学生が後を絶たない。

これらの例からからも分かるように、抽象化は理系であれば求められて然るべき素養である。これは一方で文系ならば必要ないともとれるが、ここでは当然ながら、抽象化することが必要であることを前提として話を進める。

では抽象化のためには何が必要か。その答えをわざわざ考える余地はない。イメージ先行が理解に必要である以上、それを踏襲した形式で進めばよいからである。すなわち、抽象化に必要なものは多様で明確な具体的イメージである。

当然のことであるが、数学は慣れているほど理解が進む。イメージを明確に、しかも多様性をもって形成できれば、それは自然な形で抽象化することができるのである。

なんだかんだと騒がれてはいるが、今の算数・数学の教育システムは一生懸命学習する生徒に対して報いるようにできているのである。

2　実験

ここからの話は議論の複雑さを考慮して先に私の実験したことを、その結果を先に報告しそこから得られる結論をこの後で述べるものとする。

2.1　セミナー説明

私は前節で述べた問題を踏まえ、高校生に抽象化の概念を説明するためにはどのような工夫をすればよいのか、ということを実際に高校生の前でセミナーをして考えた。私が考えた、数学の第 2 段階、イメージ打破・抽象化の本質を伝えるセミナーは資料 1 の通りである。

（資料 1）　セミナー概要

麗和セミナー番外編　「“数学実験”体験教室」

実施場所：埼玉県立浦和高校

実施日時：平成 18 年 11 月 28 日（火）午後 4 時〜（放課後）

このセミナーは、生徒の数学への意欲・関心・理解といったものの向上を図るために高校側からの要請されるものではなく、実験的にこちらのやりたいことをやらせてもらうという意味で授業としての色が薄い。そのために、融通の利きやすい私の母校である埼玉県立浦和高校（以下浦和高校）に協力を依頼した。

浦和高校では不定期に OB による講演会『麗和セミナー』を実施している。

『麗和セミナー』の特徴

- 放課後に正規授業時間外で行われる自由参加のセミナー
- 生徒の参加に関しては文理学年不問
- 学校側から講演者に内容に関して要望をすることはなく、講演者は己の力量で好きな話をすることができる
- 90 分程度の講演を 1 回完了方式
- 社会や仕事、また研究などへの接点を高校生に提供することが主な目的
- 経費は高校同窓会によって運営（公的な補助は現在はなし）
- 基本的に成功している社会人が講演に来ることが多く、学生の講演は稀である

2.2　セミナーの構成

セミナーは大きくわけて 3 部構成。第 1 部はセミナーでやる内容を PowerPoint を使って 10 分ほどで説明。

第 2 部に用意したオリジナルのワークシート（資料 2）をやる。このワークシートは黙って生徒にやらせるのではなく、前で私が説明をしながら生徒を順番に当てていき答えてもらうという形式で、生徒が個別にやることは想定していない。ただしこの場合、こちらの意図していることを答えてもらえるかどうかにセミナーの進行具合が大きく関わってくるので、リスクの高い進め方であることは否めない。これは 70 分ほどを計画。

第 3 部は質疑応答。今日の話でも関係ない日常の数学の疑問でもなんでも質問を受け、それに答えるというもの。セミナー自体は 90 分程度と予告してあったために、10 分程度と当初予定していたが質問が多く、終了後も質問が続く結果となった。

＜セミナー第 1 部＞

ここでのポイントは今日やるセミナーが普段の数学の授業や、今までの OB による麗和セミナーとは違うのだと認識させること。具体的には、お菓子やコーヒーを提供して和やかで話し易い空気を作ること、そして数学といっても応用のための数学ではなく、学問としての数学をやるのだということを印象付ける必要がある。そうでないとこの後の第 2 部に移行したときに進行に支障をきたすからである。その意味で重要な導入であるといえる。

＜セミナー第 2 部＞

ここが数学の楽しさ、面白さを伝える唯一にして最大の山場である。第 2 部では前で説明をしながらワークシートの問題を生徒に当てて答えてもらい、その答えを元に話を進める。

このワークシートは大学でいう「演算」に焦点を当てて作ってある。演算とは「値を入れるとある規則によって別の値が出てくる」というモノである。値というのは数値に限らず、数学に出てくる値（関数や集合など）も含んでいる。また、入れる値、出てくる値ともに 1 つとは限らない。

こうやって説明をすると回りくどくなるが、高校生に説明する際には実際に答えてもらうことで大幅に説明を簡略化できるのがこのワークシートの利点でもある。

実際の第 2 部の進行については付録 A（セミナー実況中継）を参考にされたい。

（資料 2）ワークシート

数学実験体験ワークシート

＜実験目的＞

良く知っている計算の動作実験を通して数学の性質を確認する。

＜実験の進め方＞

下に未完成な数式が多数あります。まず、左辺にある記号の計算するときの頭の中での操作を考えてください。それを踏まえて左辺の四角に**入れることのできる“モノ”全て**を考えてください。また、それらを入れたときに出てくる右辺の四角の中身を予測してください。同時に考えた事を上手に表現する努力をしてください。
数学の理解度によって答えが異なることがあります。

1. 乗法）

$\boxed{ア} \times \boxed{イ} = \boxed{ウ}$

例＞　アとイは自然数。計算ルールは「アをイ回足す」
（他の数では乗法はどのような操作によって定められるか？）

2. 余りを出さない除法）

$\boxed{エ} \div \boxed{オ} = \boxed{カ}$

3. 余りの出る除法）

$\boxed{キ} \div \boxed{ク} = \boxed{ケ}$ あまり $\boxed{コ}$

（資料 2　続き）

4. 内積）

$$\boxed{サ}\bullet\boxed{シ}=\boxed{ス}$$

5. シグマ）

$$\sum_{k=1}^{\boxed{セ}}\boxed{ソ}=\boxed{タ}$$

6. 対数関数）

$$\log_{\boxed{チ}}\boxed{ツ}=\boxed{テ}$$

7. 微分）

$$\frac{d}{dx}\boxed{ト}=\boxed{ナ}$$

8. 不定積分）

$$\int\boxed{ニ}dx=\boxed{ヌ}$$

9. 加法）

$$\boxed{ネ}+\boxed{ノ}=\boxed{ハ}$$

2.3　セミナーの目的と意図

このセミナーの意図はイメージ打破・抽象化を学生本人の頭の中でやってもらうということにある。イメージ打破・抽象化のためには明確な多数のイメージが必要であるが、既に良く知っている内容であればイメージの打破ができるだろうというのがこちらの真意である。

例えばワークシートを見ると最初に乗法がある。掛け算を知らない高校生はいないのでこんなことを質問しても何も得るものが無いかのように思われる。しかしながら、実際にやってみるとそうはならない。自然数や有理数と同様に実数の掛け算ルール（特に無理数同士の掛け算）の説明を求められると答えることができないという不思議な

現象に全員が気付くのである。ここにイメージ先行型の落とし穴があるのだ。

イメージだけでは上手く説明できない。「なんとなく分かっている」「あなたも実はわかっているでしょう？」「なぜそんな意地悪な質問をするの？」という空気が教室を包み込む。これがこちらの意図である。

3　結論

3.1　抽象化の是非に関して

ではなぜ、抽象化が必要なのか。この疑問には目をつぶってもらいたい。本質的な理解には必要。多くの科学分野が現在直面している問題の大半は数学の発展によってのみ、解決が図られると言われているものが多く、数学の発展には不可欠であることには間違いがない。

しかしながら、市民全員にこのイメージ打破・抽象化の知識・技術が必要かといえば、全くそんなことはない。つまり数学を専門でやる人以外には教養のみ勉強である。かといって、楽しみが他に無いこともないのが今回のセミナーではっきりしている。

3.2　統括

今回のセミナーのアンケートの結果が資料 3 ある。これを見ると多くの学生が今回のセミナーに対して満足していることがうかがえる。これはどこから来る満足なのか。

それは私自信が数学を専攻することを選んだ記憶を辿れば見えてくる。このセミナーの 1 番面白いところは今まで自分が積み上げてきた勉強の蓄積を具体的な形にしたことである。“抽象化すること”が“具体的な形”なのは相反するようにも思えるが、とにかく日々の学習の中で表れる「せっかく考えたのに使えない」「自分の経験したことを残したい、だけど上手く残せない」という頭の中の考えカスを綺麗にまとめることができたことである。しかも、過去の偉人と同じ地点に到達しているという誇りや自信もついてくる。ここに数学の最大の楽しみがあるのであり、それを体験させることができたという意味でこのセミナーは非常に成功したと判断できるのである。

（資料 3）アンケートとその集計結果

アンケート（達成項目シート）

理解度や説明の分かりやすさを調査し、今後の参考にするためのアンケートシートですのでご協力をお願いします。

＜このシートの使い方＞

自分が達成したと思う項目をレ（チェック）してください。

このシートに沿って話を進めていく予定ではありますが、進行によっては発生しない項目もあります。

項目に対して質問はしないでください。また質問の意味がわからない、達成したか自信がない場合はチェックをしないでください。

□ 1. このアンケート「達成項目シート」の使い方を理解した。(24)

□ 2. 数学実験の進め方を説明文を読み理解した。(21)

□ ３. 数学実験の進め方を具体例を交えて理解した。(20)

□ ４. 乗法のルールを小学生に立ち返って確認した。(23)

□ ５. 乗法を有理数まで拡張することに成功した。(21)

□ ６. 乗法を実数まで拡張することに成功した。(5)

□ ７. 乗法を実数まで拡張することに失敗した。(12)

□ ８. 乗法を複素数以上にまで拡張することに成功した。(7)

□ ９. あまりが出る除法はルールが複雑だと思うようなった。(17)

□ １０. 結局ベクトルとはなんなのかよくわからない。(11)

□ 11. 四角に数字以外の“モノ”をいれてみた。(12)

□ 12. Σ記号は計算は面倒だがルールは易しいと思う。(3)

□ １３. 微分や積分の記号は以前から知っていた。(11)

□ １４. 微分や積分のルールは分からないがある程度計算はできる。(7)

□ １５. 積分記号とは今後なるべく関わり合いを持ちたくはないと思う。(1)

□ １６. 加法ができる全ての集合を網羅した。(2)

□ １７. 加法ができない具体的な例を提示した。(10)

□ １８. この数学実験は普段の数学とは距離を感じる。(8)

□ １９. 大学の数学は自分には遠い存在であると感じる。(3)

□ ２０. 以前よりも数学に対して興味が湧いた。(15)

□ 21. 以前から数学には興味があるが、今日の話は別物だと思う。(11)

□ 22. 今日はお茶とお菓子と数学を味わって楽しんだ。(19)

□ ２３. 数学の日本語表現は分かりづらくて意味を理解するのに苦しんだ。(4)

□ ２４.（自由記入欄）

その他、何かあれば裏面にどうぞ！！

付録A　セミナー実況中継

実際のセミナー第 2 部の進行は以下の通り

ここからは順番に発言してもらうので指されたら大きな声で答えてください。

最初の問題は乗法です。

$$\boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}} = \boxed{\text{ウ}}$$

みなさんはどこまで乗法の計算ができるでしょうか。唐突ですが、乗法といえばどんな問題を目にしますか？

生徒 A「3×4」

それが最初に習うタイプですね。では次の人は

生徒 B「3×8」

う〜ん、それは前の人とほとんど同じ答えだね。こちらの都合を言わせてもらえばなるべく違う種類のものを□の中には入れてもらいたいんだよね。そうじゃないと、大学に入ったときに空気読めない人って思われてしまうから。

生徒 B「じゃあ $5i \times 4$」

よしよし、それだと違う感じのものが入った。では次の人

生徒C「$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$」

うんうん、いい感じだ。みんな分かってきたね。ここからはだんだん選択肢が少なくなってくるから難しいけど、次の人は出てくるかな。

生徒D「$\frac{3}{8} \times \frac{4}{5}$」

うん、分数だ。まだ出てきてなかったね。まだ他に何かあるかな。

生徒E「もう思いつきません。」

そうだな、もう 1 つぐらい欲しいのがあるんだけど、それは中学に入ってすぐに習うやつなんだよな。何か思いつく人。

生徒H「分かった。$(-3) \times (-5)$」

正解。そうそう、正負の数を言ってもらいたかったんだ。さて、ここにいろんな種類の乗法が出てきたけど、この計算できないって人は流石にこの中にはいないよね。みんな、良く知っている計算ばかりだ。これだったら誰が計算しても、例えば大学教授がやっても君たちがやっても同じ結果になるよね。もちろんこれは同じルールで計算を実行しているからだね。じゃあ、次は計算のルール確認しておこう。

最初の自然数同士の乗法の場合、3×4 だったら、「3 を 4 回足す」ってルールを小学 2 年生で習ったよね。こんなことを高校生に話すと馬鹿にしているみたいで気が引けるけど。でも、分数になるとこうはいかないな。「$\frac{3}{8}$ を $\frac{4}{5}$ 回足す」じゃあ意味がわからないもん。さっきのルールは自然数の中でしか通用しないから、分数でも乗法ができるようにルールを拡張する必要があるもんね。

じゃあ、さっき発言してくれた人、どうやって計算するの。

生徒D「えっと、分母と分子を分けてそれぞれで掛け算します」

そうだね。分数を分母分子に分解すればそれぞれは自然数になるわけだから自然数の場合の乗法ルールを適用して計算ができる。まあ約分は掛け算とは別の作業だから今は置いておこう。正解です。

乗法のルールを拡張する必要があるといったけど、こうしてみると分数での掛け算が基本的なルールで、自然数の乗法はその中で特に簡単な場合と思うこともできるね。大事なことは、この分数でのルールを使って自然数を計算してもさっきと同じ結果になるということで、この意味で拡張という言い方ができるし、小学 2 年生がやっても高校生がやっても大学教授がやっても同じ結果が得られるという特質の根源になっています。

さて、話を進めて次は正負の数の場合に行きましょう。この場合のルールはどうなっていますか。

生徒H「ひとまず符号は置いといて、数字だけ計算する。符号は符号で別のルールがあります。」

そうですね。数字だけなら分数のルールを使って計算できるし、符号は－の数で決める。偶数だったら＋、奇数だったら－だね。このルールを付け加えれば全ての有理数の乗法を計算することができるようになりますね。日本では中学 1 年生でこの領域にまでたどり着きます。

じゃあ次に行きましょう（ちょっとここでズルをして$\sqrt{3}$をπに書き換える)。次は無理数ですね。無理数の場合はどんな拡張が必要ですか。

生徒C「・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・」

あれ、計算はできますよねえ。

生徒C「・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・」

誰か分かる人。

『・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・』

では無理数の計算はできないということですね。これは困った。まあ、仕方ないので話は進めますが有理数と無理数を合わせて実数といいます。さらに虚数単位である i を加えて複素数を作ります。これで数字が出そろったことになります。ひとまずここでは謎のルールがあって乗法を実数やさらにその外側にある複素数にまで拡張できるということだけ押えておきましょう（この話はここまで)。

では次の問題に移ります。次は除法です。

$\boxed{\text{エ}} \div \boxed{\text{オ}} = \boxed{\text{カ}}$

除法も同じようにどんなものが入るのかを確認していきましょう。余りの出さない除法というのがポイントです。さて、乗法のときと同じように答えてもらいましょう。

生徒E「えっと、$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$」

そうですね。他には

生徒F「・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・」

出てきませんか、では除法のルールを説明しもらいましょうか。

生徒F「はい、有理数であれば割る数の掛けて1になる数を掛けます。」

正解ですね。専門用語を使うと逆数というやつですね。除法は逆数の乗法のことです。乗法のルールが明確になっていない無理数では除法のルールを説明できないという判断は正しいです。むしろ、ここで無理数の除法を発言する人は話の流れが分かってないってことですね。

それと気にして欲しいのは逆数をとるという作業です。分数であれば分母分子を入れ替えることで実現できますからそれほど心配ありませんが、どんな数でも逆数が一意に取れるとは限らないですよね。いくつか逆数の上手く取れない例を挙げてもらえますか。

生徒G「逆数の無い例ですか・・・？」

いくつか例をというと、まるで複数あるかのような気がする意地悪い表現ですが、正確には逆数の取れない数が1つだけありますね。何か思いつきませんか。

生徒G「ああ、0のことですね。」

その通り。例外ということですが、こういった特殊な場合をキチンと除外しておかないとルール決めがしっかりしないので注意が必要です。

では次に進みましょう。次も除法ですが、除法といっても今度は余りの出る場合です。

$\boxed{\text{キ}} \div \boxed{\text{ク}} = \boxed{\text{ケ}}$ あまり $\boxed{\text{コ}}$

なぜルールが異なるのに同じ除法といって÷の記号を使うのか、疑問がくすぶっている人も多いのではないでしょうか。なぜこの2つを同じ記号で表現するのかについては私も良く知りません。分かっていることは明確にルールが異なるという点です。

さて、今までと同様にしてどんなモノが入るのかを聞いてみましょう。なるべく最初は簡単なモノからお願いします。

生徒I「$11 \div 3$」

はい、いいですね。キチンと余りもでます。では次。

生徒J「$(-11) \div 3$」

ちょっと気になるけど、まあいいでしょう。では次。

生徒K「$\sqrt{11} \div 2$」

だんだん怪しくなってきました。そろそろルールの確認に行きましょう。順にお願いします。この場合、商と余りの2つの値が出てくるのでそれぞれの算出のルールを教

えてください。

生徒Ｉ「はい、11 から 3 を何回引き算できるかを考え、引き算できる回数が商。それ以上引き算できなくなったときの残った数が余りです。」

よくできました。小学 3 年ぐらいで習うことですが、キチンと説明するとそんな感じですね。「いいや、自分の除法はそうじゃないぞ」って人はいないと思いますが、でもそれだと、次の人は困ってしまいますね。

生徒Ｊ「だったら符号は置いておいて、今のルールを使い、余りは・・・」

うん、そういうルール決めはできるけどそれだとみんなが納得するルールにはならなくなってしまうんだなあ。大事なのは誰もが暗黙の了解でルールを知っていて、いちいち確認しなくても誤解のしようがないという性質が数学には欲しいんだったよね。今ここで共通のルールを作ったとしても、埼玉でしか通用しないローカルルールだったら意味がないもんね。

ひとまず、ここでは自然数だけが入る場合だけ、ルールがしっかりしているとしておきましょう。

といっておきながら、他に「これは入れてもルールがしっかりしているぞ！！」っていうモノを知っている人はいますか。

『・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・』

例えばこんな割り算は見たことないですか。

$$\left(3x^2+5x+7\right)\div(2x+1)$$

『ああ、それがあったか。』

これは多項式の割り算ですね。敢えてここでは詳しくルールの確認はしませんが、この場合にも共通するように余りの出る割り算のルールを説明しようとするととんでもないことが起こります。なぜ小学校で余りの出る割り算が急に姿を消すのか、その理由は予想以上に複雑なルールが裏にあるからなのです。

さて、では次に行きましょう。次の問題は内積です。

$$\boxed{\text{サ}}\bullet\boxed{\text{シ}}=\boxed{\text{ス}}$$

これはどの分野で見たことありますか。

生徒Ｋ「見たことありません。」

では飛ばして次にいきます。次はシグマ記号です。

$$\sum_{k=1}^{\boxed{\text{セ}}}\boxed{\text{ソ}}=\boxed{\text{タ}}$$

この言葉どの分野で聞きますか。

生徒Ｌ「聞いたことありません。」

ではどんどん次にいきます（対数関数を含めた 3 つの問題は出席者が 1 年生というこ

とでセミナーでは省略しました)。次は微分です。

$$\frac{d}{dx}\boxed{\quad ト \quad} = \boxed{\quad ナ \quad}$$

言葉ぐらいは知っていますね。

生徒M「私は3年生なので知っています。」

それはよかった。では2．3年生に微分の計算を少しやってもらいましょう。まず$2x^3$を微分するとどうなりますか。

生徒M（3年生)「$6x^2$ です。」

そうですね。では次、x^7+x^3+5　は微分すると

生徒N（2年生)「$7x^6+3x^2$ です。」

またまた正解です。ではもう1問ぐらい。$2x^3+x^2+4x$　はどうでしょう。

生徒O（3年生)「$6x^2+2x+4$ です。」

そうですね、優秀です。ではそろそろ本番いきます。x^5+5x^2+7 はどうなるでしょう。もちろん、1 年生であれば全く知らないわけですから、間違えて当然。ここにいるみんなも君が間違えて笑う人は1人もいないし、数学っぽい答えをすれば100億分の1ぐらいの確率で正解するかもしれません。さあ、答えてみてください。

生徒P（1年生)「多分 $5x^4+10x$ だと思います。」

大正解です。ああ、既に予習して知っていましたか。

生徒P「いえ、ただ x の肩についているのが前にでて1つ小さくなるという規則性があるので。」

またまた大正解です。自分で問題を出しておいてこういうことを言うのも変ですが、実は数学のルールなんてものは細かく知っていなくてもするどい観察眼や経験と勘さえあれば実際に困ることはありません。微分もこの計算が全てというわけではありませんが、基本的な計算問題であればこの程度の理解で十分です。

積分は微分の逆の操作です。

$$\int \boxed{\quad ニ \quad} dx = \boxed{\quad ヌ \quad}$$

乗法と除法の関係に近いですね。乗法と除法は数ですが、微分積分では関数であるというのが違いですが概念としては共通しています。

この付近は理系になると大学で嫌と言うほど勉強することになるので覚悟しておいてください。

さて、最後は加法です。

$$\boxed{\quad ネ \quad} + \boxed{\quad ノ \quad} = \boxed{\quad ハ \quad}$$

既にこうやって前からみんなの表情を見ると、ことの重大さに気が付いている人がほとんどみたいだね。くどいようだけど、小学校のときに立ち返って、どうやって足し

算というものを習ったのか思い出してみると

生徒Q「りんごが3個あって、5個足すと8個になるって・・・」

うん、その通り。全然ルールについては触れていないんだよね。なんとなく感覚で、というか、そうなるものだというか。とにかく、従え慣れろという幹事で教わるね。だけど、これは正しくて、小学1年生に自然数と足し算の数学的な規則（正確にはペアノの算術公理のこと）を教えることに意味はないからね。まあ今の状態で無事体得できているということに歓びを持ってくれればいいと思います。

でもこれだと理解しているか分からないのでね、逆に加法のできないモノを考えてみましょう。誰か、加法のできない例を思いつく人はいますか。

『・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・』

まあ数学じゃなければいくらでもあるよね。例えば、仲良し3人組A君、B君、C君がいます。テストをやると、A君は20点、B君は30点、C君は50点取れます。では3人で力を合わせれば、100点取れるかといえば、当然そんなわけはないね。なんでかと言えば得点できる問題がかぶっているとか、選択問題を勘で選んだら当たったとかで、力を合わせたところで「得点できる問題」が「点数の足し算」の通りに増えるとは限らないからだね。もちろん、極めて偶然に100点が取れるということもあるかもしれないけど、それは稀なケースだって説明はいらないよね。

で、数学で当てはめるとどんなものに置き換えられるか。高校生でも知っている範囲で答えれば、確率の出てくる事象がこれにあたる。

サイコロを振って｛偶数の目の出る｝確率$\frac{3}{6}$ と、｛4以下の目の出る｝確率 $\frac{4}{6}$ は合わせると、$\frac{7}{6}$ にはならずに$\frac{5}{6}$ になるね。当然これは、2つの事象に共通部分があるために、事象の合算が確率の合計と一致しない、さっきのテストの得点に似ている現象だね。

加法は算数のころから親しんでいる操作だから、使えないとショックだってだけじゃなく、イメージしづらい曖昧なモノができちゃうよね。

まあだから、こうやって考えてみると集合とか事象とかって概念は自然数や実数といった数の概念よりも自由奔放で数学的には難しい世界だったことに気が付くわけだ。

以上で今日の言いたいことは全部です。

（付録A　終）

付録B　　問題の背景

ここではワークシート問題の背景にある数学の特性について簡単に説明をしておきます。なお、この内容は大学の教養の範囲を大幅に逸脱しています。

１．乗法＞
数の抽象化が最初の課題であるがこれは高校生であればクリアできると思っていたし、結果も予想通りであった。数は計算の基本であり、ある程度の抽象化は既に完了している様子である。数が集まることで集合ができる。集合について考えることは、数をたくさん扱うことよりも遥かに大きな労力を必要とするが、この程度であれば難なく抽象化が可能であった。問題となるのは無理数をどうやって抽象化するか、実数をどう定式化するのかという点であるが、これは「難しい」ということさえ感じてもらえれば十分であるというのがこちらの意図である。
なお実数の乗法の定義は切断（有理数全体の集合を上下 2 つの集合に切断したときの極限）を使う方法が正確であるが、これを知っている大人は数学系以外では極めて珍しいはずである。また、セミナーでは学習範囲の都合上触れなかったが、行列や関数、数列、演算子なども四角に入れることができる。

２．余りの出ない除法＞
これは群論である体（field）の関係の話である。行列の話ができれば、除法ができるのは正則行列全体の集合と話が進むのだが、高校生相手ではしょうがない。逆元と逆元の存在しない特別な 0 という数に触れるだけで終わる。

３．余りの出る除法＞
余りの出る場合との比較の意味もあるが、これはまさに抽象化の難しい話である。セミナーでも説明しなかったが実際に、自然数の除法と多項式の除法に共通のルールを持たせることにした場合には、商集合、射影、代表元などを駆使しなければならないであろう、大仕事になること間違いなしである。
にも関わらず、小学生はけなげに言われた通りのことを実行するのが面白くもある。

４．シグマ記号＞
これは今までと趣向を変えて、計算は大変だけどルールを説明するのは簡単という例。数列という値を正しく説明できるかという落とし穴も兼ね備えている。
なお、高校までの数学だと、数列がまるで「規則性によって決まっているもの数の列」という誤解を与えかねないのが不安なところである。比較的正しい認識は「番号に対して値が割り振られている数の集合」であるし、数列といった場合にはその要素となる数全体のことを指す。

５．内積＞
ヒルベルト空間の一例としてベクトルを扱いたかった。シグマにも共通することだが、複数の数の情報を持つ値から数字を引き出す演算の一種。情報が落ちるがその代わり

に特性が見えるという性質の演算である。実はこの“情報が減るけど特性を見るために重要な演算”という意味がわからないと、平均や分散といった統計学的な数値は一生理解し得ないのでやはり注意が必要である。

６．対数関数＞

ここでは関数というものの扱いをしたかった。関数に対する抽象的な理解も高校ではお粗末である。抽象化へのジャンプに不可欠な定義域・値域といったそれまではあまり注目されないファクターにスポットを当てたかった。
関数を作るには連続体濃度である実数が必要で、その自由度も遥かに大きいという点にも本当は触れたかったのだが、それは当然のごとく無理であった。

７．微分＞

これは自信をなくしかけた勇者たちへの回復剤である。実はルールを知らなくても計算できる。問題が解ける。今までどうやって自分たちが数学を習い勉強してきたか、これからどのように勉強するべきなのかを暗に示す問題である。
見よう見まねで、言われた通りに。それが通用するのが数学。そしてそこから更に大きく発展していくのが数学ということを理解してもらいたかった。
なお、微分できるかモノを聞くのはかなり野暮である。実際微分できるものを私に聞かれてもよくわからない。
超関数の意味での微分や幾何におけるコホモロジーなど、微分に関しては話が尽きない。

８．積分＞

微分を書いた以上成り行きという意味合いが強い。ちなみに積分できる関数とは何かと聞かれて正しく答えることができる学生は数学科以外では期待できない。これは不連続点が有限であれば積分可能とは良く知られているが、無限にあっても積分できる場合があるためで、リーマン積分ではその辺が曖昧になっているためである。実際にはっきりさせたい場合には集合論と測度論を用いてルベーグ積分を考えなければならない。

９．加法＞

これは理解度を測るための指標である。加法があると空間ができる（ことが多い)。そのため考える世界が急激な、しかも極めてよい秩序を持って広がるのである。
そのことを高校生に伝えることなどできはしないが、それでも足し算すらできない集まりを数学で考えるのが難しいというだけでも価値があると思う。

（付録Ｂ　終）

付録C　　後記　数学の難しさと数学を伝える難しさ

このワークシートの問題は非常に難しいことを要求している。実際に高校生の前でセミナーする前に東京大学の学部生、大学院生を前にリハーサルをしたが、数学を専門でやっている人でなければ実数の乗法を知らないし、積分の可能なもの、内積を入れることのできる例としてベクトル以外を挙げることもまずできない。フーリエ変換を考えるときに積分可能性やヒルベルト空間論は必須であるのでこれは（数学をやる人の）常識的にはおかしい（フーリエ変換は変微分方程式を解くときに必須）のだが、それでも特に問題は生じない。

理系の大学院生でも知らないのだから全くもって意味のないことである、と言いたいのだが、そうとも言い切れないのが数学の本質的に難しいところである。
なぜなら、大人がよくわかっていないのに子供に無理を押し付けるという行動は数学では稀ではないからである。中学ですらこの傾向にあるのだから脱帽である。その典型例が因数分解である。

因数分解にはいくつかの越えなければならないハードルがいくつか存在するが、それを一般の（中学を卒業した）大人がクリアしているとは到底考えられない。因数分解をする際には文字、正確には「何かの数の代用」という考えをしていると意味が通じない。“ｘ”と書かれているアルファベットが式を表しているということを理解していなければならないからだ。

中学の教科書を見ると単元に「文字と式」と書かれている。文字と式は違うものなのだ。“ｘ”ひとつだと「式」という感じがしないかもしれないが、教科書を注意深く読めば「単項式」との呼称も出てくる。問題なのは、式と文字は同じ表記であるために読み手が区別をしなければならないことである。なお、中学までの場合では文字と式の本質的な違いが現れることが少ないために混同してもさほど影響が少ない。影響が出てくる可能性があるのが因数分解なのである。では実際に、文字と式とはどう区別するべきなのか、キチンと知っているか。答えは当然ノーである。

これは怠けているからとしか言いようのない現象ではあるが多くの人がそのことに対して目をつぶっている以上、どうすることもできない問題である。まあ、直接的な被害を受けるのが、純粋無垢な中学生であるということが救いである。

（付録 C　終）

付録D　　セミナー後の質問（高校生）

ここではセミナー後に質問された内容を多少まとめておく。意外なまでに高校生は数学に対する嗅覚にすぐれ、また難解な問題へチャレンジしていることが伺える。このような高校生からの質問に大人としてどのように答えるべきか一緒に考えてもらいたい。

（質問１）
自分は高校 3 年で積分や極限、三角関数なども一通り習いましたが、円周率πというのがよくわかりません。計算しても出てこないのです。どうやって出せばいいのですか？
（質問２）
なぜ 1/7 は循環小数なのですか？
（質問３）
フィボナッチ数列において 5 の倍数、7 の倍数になる一般項を求めるにはどうしたらいいですか？
（質問４）
先生から複素数には大小関係が定義できないと聞きました。なぜですか？

答えの難易度は（質問 3）＜（質問 4）＜（質問 2）＜（質問 1）といった具合ですね。数学では「なぜ？」と聞かれるだけで相当難しい問題に化けるのが面白くもあり、つまらなくもあります。教育熱心な大人のためのヒントは以下の通り。

（質問 1）
円周率πの図形的な意味は円の直径に対する円周の長さの比であるが、どうやってその長さを求めるのかという問題。このままでは決して答えることはできない。無限級数関数から話を始めるのが適当。
（質問２）
有理数や無理数を正しく理解するために適切な質問。10 進法では割り切れないことと循環することを 2 段階で説明する。
（質問３）
これは試してみれば分かる。試す場合の工夫を教えれば良い。
（質問４）
辞書式に大小関係を入れれば実数上での大小関係を保ったままの拡張が可能であるがそのことにあまり意味はない。その点も含めて意味のある関係にはならないことを論す。

（付録 C　終）

付録E　　セミナー後の雑談

高校で行うということもあり、OB セミナーを仕切っている長谷川博教諭からも意見をいくつか頂いたのでここで紹介しておく。

院生が話をしにくるというのは実は稀で、普通はもっと社会人とかの成功した人が来るんだ。その場合、高校生は萎縮して質問をできなかったり、逆にあまりに立場が離れすぎているために興味が湧かず寝てしまう学生もいる。もちろん自由参加なのでそのこと自体を咎めるような指導はしないが、それでもこちらの意図からすれば残念なことが多い。その点、院生が話をするというのは新鮮だね。勉強が生活の基本という点も高校生と近いし、何より歳が近いので親近感が湧きやすい。「自分も頑張って勉強すれば数年後にはああいう風になれるんだ。」そんな期待を持たしてくれるような話だからね。学部生だと研究の理解が雑で話のまとまりに欠ける部分が多いけれど、院生であれば自分の研究を持っているということもあって、その点を心配する必要がないし。そして、結論がはっきりしていない話というのも院生の特権だね。どうしても教師として教える立場にいれば、明らかなことを教えなければならない。結論がまだ不明なこと、自分の考えはこうだけど、うまくいっていないこと、まあ専門の人ならば知っていることだけど初心者であればこの程度に理解を留めておいたほうがいいこと、って話の中にも伝える度合いの加減ができるのがうらやましい。

このセミナーは元々聞きにきた学生全員の新しい興味関心を切り開くことは目的にしていないんだ。1 回のセミナーで興味を持つ学生は 2 人いれば十分なんだ。だって年間 6 回この麗和セミナーを行っているから、生徒は 3 年間で 18 回聞くことができる。そのうち 1 回につき 2 人の興味が湧けば、3 年間で 36 人の生徒が新しい興味を開拓したことになる。これはうちの高校の東大合格者数を上回る数字だ。だから、その程度でいいんだよ。

（付録 E　終）

謝辞

最後になりますが、この論文を制作するにあたって埼玉県立浦和高等学校の方々に多大なる協力をいただきました。特に麗和セミナーを取り仕切る長谷川博教諭、高校の恩師である杉山正紀教諭にはお世話になりました。この場を借りて熱くお礼申し上げます。

東京大学大学院数理科学研究科　修士２年

科学技術インタープリター養成プログラム１期生

山本幸司